Jean Sousselier 10/08/2022

De la difficulté de raisonner sur l'infini.

Le présent document a pour objet de pointer la difficulté d'étendre à l'infini une proposition P(n) valable pour une valeur quelconque de n : cette extension à l'infini est-elle licite ou non ?

1. Cas n°1 : la preuve de CANTOR.

Pour prouver que l'ensemble des réels de l'intervalle [0,1] n'est pas dénombrable, Cantor a mis en évidence l'incohérence induite par une bijection de cet ensemble avec l'ensemble N des entiers naturels. En effet, si une telle bijection existait, on pourrait écrire :

$[0,1] = \{X_1,X_2,X_3,\ldots.\}$ chaque réel X_k s'écrivant : $X_k = 0,a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$

Considérons alors le nombre réel Y construit de proche en proche : sa n ième décimale vaut 1 si la n ième décimale a_n de X_n est différente de 1, et 2 dans le cas contraire, et ceci pour toutes les valeurs de n, jusqu'à l'infini.
Soit donc la proposition **P(n)** : le nombre réel Y ainsi créé est différent de tous les X_i par sa i ième décimale, pour i=1, 2, 3,….,n
En sautant à l'infini, on conclut que Y n'appartient pas à l'ensemble précédent $\{X_1,X_2,X_3,\ldots\}$.
On arrive donc bien à une contradiction avec la bijection supposée, et Cantor en conclut que l'ensemble des réels n'est pas dénombrable.
Cette preuve est acceptée depuis plus d'un siècle par la quasi-totalité des mathématiciens.

2. Cas N°2 : l'ensemble des parties de N.

Quel que soit n, l'ensemble des parties de N (ensemble des entiers naturels) ayant n éléments est dénombrable (résultat facile à démontrer). Donc on ne voit pas pourquoi on refuserait d'étendre à l'infini cette proposition **P(n)**, ainsi qu'on l'a permis dans la preuve de Cantor.
Affirmons donc la proposition $P(\infty)$: l'ensemble des parties de N est dénombrable (on ne se limite plus aux parties ayant n éléments).
Mais alors on tombe sur une incohérence, car on arrive à la conclusion inverse de celle de Cantor : il est connu que l'ensemble des parties de N est équipotent à l'ensemble des réels.
Donc si on applique la même règle de passage à l'infini dans les 2 cas, (si P(n) est vraie, $P(\infty)$ est vraie aussi), on arrive à 2 conclusions opposées ! Et on ne voit pas pourquoi on se permettrait d'appliquer la règle dans un cas, et on la refuserait dans un autre cas.

3. Cas N°3 : plus trivial encore !

Considérons le nombre π écrit en numérotation décimale, et la proposition suivante P(n) :
Si grand que soit n, le nombre obtenu en ne retenant que les n premières décimales de π est rationnel.
Donc, si on étend cette proposition à l'infini, $P(\infty)$ est rationnel, donc π est rationnel !

Ce qui montre à l'évidence qu'une proposition P(n) vraie quel que soit n ne saurait forcément être étendue à l'infini : cela remet en question la preuve de Cantor.

Pour conclure, comme disait Wittgenstein :
« Sur ce dont on ne peut parler, il faut garder le silence. »